

CHAPITRE 8

EXERCICE 8.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcul des valeurs propres

- polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 2$$

$$= [(1-\lambda) + \sqrt{2}][(1-\lambda) - \sqrt{2}]$$

$$= [(1+\sqrt{2}-\lambda)(1-\sqrt{2}-\lambda)]$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1+\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 1-\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{valeurs propres de } A$$

calcul des vecteurs propres

Soient $\vec{x}^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\vec{x}^0$ vecteurs propres associés à la valeur propre λ .

$$\Leftrightarrow A\vec{x}^0 = \lambda\vec{x}^0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b = \lambda a \\ a+b = \lambda b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = (\lambda-1)a \\ a = (\lambda-1)b \end{cases}$$

vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 2b = (\lambda_2 - 1)a \\ a = (\lambda_2 - 1)b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -a\sqrt{2} \\ a = -b\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-a\sqrt{2}}{2}$$

d'où le vecteur propre $\vec{u}_1^0$ de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ $\vec{u}_1^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + \sqrt{2} : \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} : \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Diagonalisation de A

$$A = P D P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sous espace propre

$$E_{\lambda_i}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 / A \vec{x} = \lambda_i \vec{x} \right\}$$

$$A \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$A \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I_n) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

$$= \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$$

valeur

Base de $E_{\lambda_i}(A)$

$$A \vec{x} = \lambda_i \vec{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = \lambda_i a \\ a + b = \lambda_i b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_i - \lambda_j) a \\ = (\lambda_i - \lambda_j) b$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

copie

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \text{ base de } E_{1+\sqrt{2}}(A)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \text{ base de } E_{1-\sqrt{2}}(A)$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(-5-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+5) \{(\lambda-4)(\lambda+5) + 18\}$$

$$= -(\lambda+5) (\lambda^2 + \lambda - 26 + 18)$$

$$= -(\lambda+5) (\lambda^2 + \lambda - 8)$$

$$= -(\lambda+5) (\lambda-1) (\lambda+2)$$

Spectre (D) = $\{-5, -2, 1\}$ valeurs distinctes $\Rightarrow$ D diagonale
simple

calcul des vecteurs propres

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$D\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6b = \lambda a \\ -3a - 5b = \lambda b \\ -3a - 6b - 5c = \lambda c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6b = (\lambda - 4)a \\ -3a = (\lambda + 5)b \\ -3a - 6b = (\lambda + 5)c \end{cases}$$

Pour $\lambda_1 = 1$ (S) $\Rightarrow$ (S1) $\begin{cases} 6b = -3a \\ -3a = 6b \\ -3a - 6b = 6c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \\ a = -2b \end{cases}$

$\vec{u}_1$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$(S) \Rightarrow (S_1) \begin{cases} 6b = -6a \\ -3a = 3b \\ -3a - 6b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ -3a + 6a = 3c \end{cases}$$

$$u_2 \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3 = -5$

$$(S) \Rightarrow (S_1) \begin{cases} 6b = -9a \\ -3a = 0 \\ -3a - 6b = 0c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = a = 0 \\ c = 0c \end{cases} \rightarrow u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ arbitraire}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ pas de valeurs propres

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

symétrique donc diagonalisable

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(1-\lambda)^{3+2} \times 1 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \right] = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$\chi = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda^2(3 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \text{Spectre } (C) = \{0, 3\}$$

Rq 0 est valeur propre de C

Us C n'est pas inversible

calcul des vecteurs propres

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$C\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = \lambda x \\ x+y+z = \lambda y \\ x+y+z = \lambda z \end{cases}$$

1er cas si $\lambda = 3$

$$3x = 3y = 3z \Rightarrow x = y = z$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

vecteur propre

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sous-espace propre de C engendré par $\lambda = 3 \Rightarrow E_3(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2ème cas si $\lambda = 0$

$$(S) \Leftrightarrow x+y+z=0$$

$$\Rightarrow z = -x-y$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_0(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

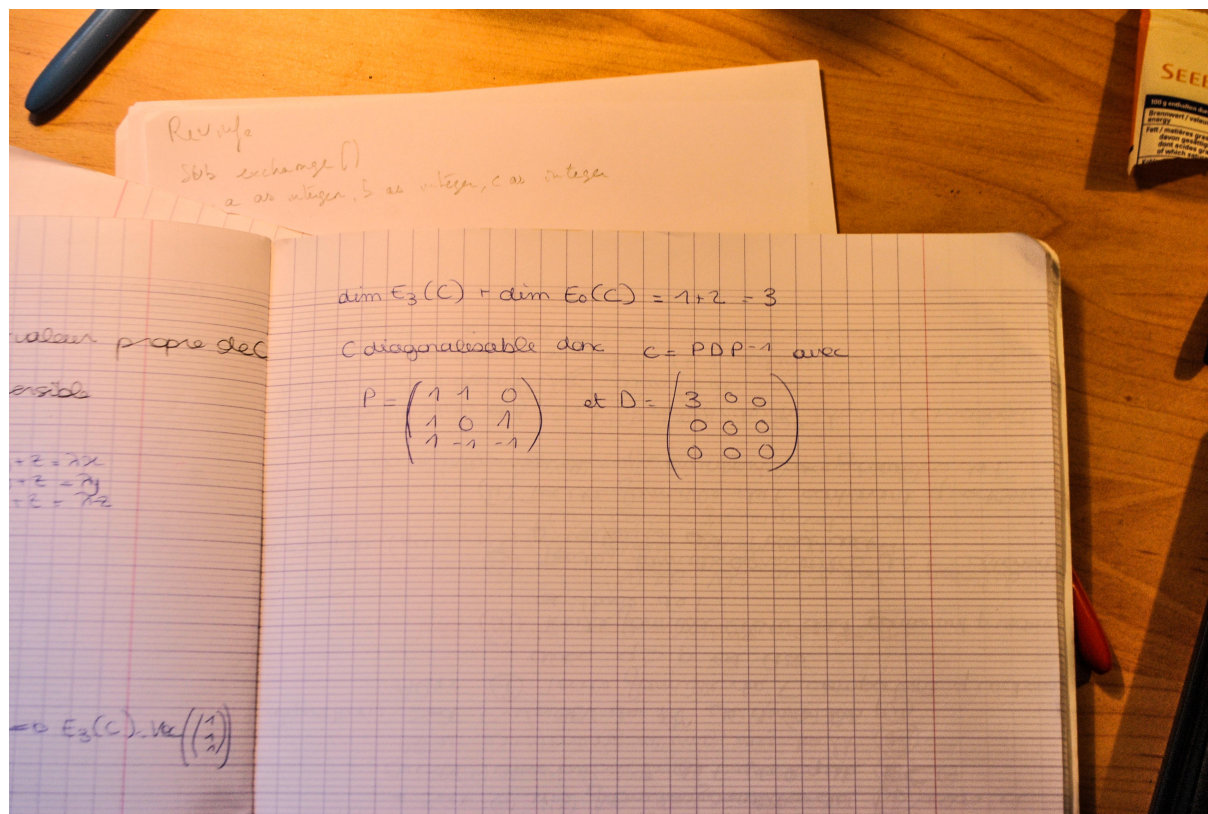
vecteurs propres de C associés à $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

les 3 vecteurs propres de C sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Exo 1

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -12 \\ -1 & -2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) [(\lambda-1)(\lambda+2)+2] = (2-\lambda) [\lambda^2 + \lambda - 2 + 2] = \lambda(\lambda+1)(2-\lambda)$$

Spectre $(E) = \{-1, 0, 2\}$ Rq. 0 valeur propre de E
 $0 \in E$ non inversible
 Mais E a 3 valeurs propres distinctes $\Rightarrow E$ diagonalisable

Calcul vecteurs propres

$$\vec{u}^0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad E \vec{u}^0 = \lambda \vec{u}^0 \quad \begin{cases} x + 2y - 12z = \lambda x \\ -x - 2y + 6z = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases}$$

1^{er} cas $\lambda = -1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 12z = -2x \\ -x + 6z = y \\ 2z = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -2x \\ -x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{u}^0 \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ - vecteur propre associé à $\lambda = -1$

$$\vec{u}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_{-1}(E) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1^0$ est un vecteur propre de E pour la valeur propre $\lambda = -1$

2ème cas $\lambda = 0$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 12z = -x \\ -x + 6y = 2y \\ 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = -x \\ -x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{vecteur propre de } E \text{ associé à } \lambda = 0$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_0(E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

3ème cas si $\lambda = 2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 12z = x \\ -x + 6z = 4y \\ 2z = 2x \end{cases}$$

$$2y - 12z + 2(-x + 6z) = x + 8y$$

$$2y - 12z - 2x + 12z = x + 8y$$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 0$$

$$\Rightarrow x = -2y$$

$$\Rightarrow 2y - 12z = -2y$$

$$4y - 12z = 0$$

$$z = \frac{1}{3}y$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ \frac{1}{3}y \end{pmatrix} \rightarrow \text{vecteur propre}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2(E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Dans $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda = 3$.

Revue

Subs échange()

Donc a est entier, b est entier, c est entier

$$E = P D P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

~~$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$~~

$$= (-1)^{1+1} (2-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times 4 \begin{vmatrix} 3 & -4-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) [(\lambda-5)(\lambda+4)+24] + 4 [-6 + (\lambda+4)]$$

$$= (2-\lambda) [\lambda^2 - \lambda - 20 + 24] + 4(\lambda - 2)$$

$$= (2-\lambda) (\lambda^2 - \lambda + 4) - 4(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda) [\lambda^2 - \lambda + 4 - 4]$$

$$= \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)$$

propre de A est
propre $\lambda = 3$

Revue

Sub exchange()

in a as integer, 5 as integer, 6 as integer

$$\text{Spectre}(F) = \{0, 1, 2\}$$

vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $F\vec{u} = \lambda \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4z = \lambda x \\ 3x - 4y + 12z = \lambda y \\ x - 2y + 5z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = (\lambda - 2)x \\ 3x + 12z = (\lambda + 4)y \\ x - 2y = (\lambda - 5)z \end{cases}$$

1^{er} cas si $\lambda = 0$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = -2x \\ 3x + 12z = 4y \\ x - 2y = -5z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2z \\ -6z + 12z = 4y \\ -2z - 2y = -5z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ 6z = 4y \\ 3z - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{so } 2y = 3z$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2z \\ 3/2 z \\ z \end{pmatrix}$ vecteur propre de F associé à la valeur propre $\lambda = 0$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{E}_0(F) = \text{Ker}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Exo 1

2^e cas si $\lambda = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = -x \\ 3x + 12z = 5y \\ x - 2y = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4z \\ -12z + 12z = 5y \\ (1-\lambda)^2 \\ (1-\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ vecteur propre ; } \lambda = 1$$

de F associée à la valeur propre $\lambda = 1$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_1(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, E_0(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$3^{\text{ème}} \text{ cas si } \lambda = 2 \quad \begin{cases} 4z = 0 \\ 3x + 12z = 6y \\ x - 2y = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Revue
échange()

5 as integer, c as integer

Exercice 8.2

1) on a $A\vec{v}^0 = \lambda\vec{v}^0$

$$\Rightarrow A(A\vec{v}^0) = A(\lambda\vec{v}^0)$$

$$\Rightarrow A^2\vec{v}^0 = \lambda A\vec{v}^0 = \lambda(\lambda\vec{v}^0) = \lambda^2\vec{v}^0$$

$$\text{ainsi } A^2\vec{v}^0 = \lambda^2\vec{v}^0$$

2) A inversible donc $A\vec{v}^0 = \lambda\vec{v}^0$

$$\Rightarrow A^{-1}(A\vec{v}^0) = A^{-1}(\lambda\vec{v}^0)$$

$$\Rightarrow \vec{v}^0 = \lambda A^{-1}\vec{v}^0$$

$$\Rightarrow A^{-1}\vec{v}^0 = \frac{1}{\lambda}\vec{v}^0$$

3) $\lambda + \alpha$

$$\begin{aligned} (A + \alpha I_n)\vec{v}^0 &= A\vec{v}^0 + \alpha I_n\vec{v}^0 \\ &= \lambda\vec{v}^0 + \alpha\vec{v}^0 \\ &= (\lambda + \alpha)\vec{v}^0 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE 8.3

$$M(a) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} (a-7) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (a-7) \{ (\lambda-6)(\lambda-3) - 4 \}$$

$$= (a-7) \{ \lambda^2 - 9\lambda + 18 - 4 \}$$

$$= (a-7) \{ \lambda^2 - 9\lambda + 14 \}$$

$$= (a-7) (\lambda-7)(\lambda-2)$$

Spectre $M(a) = \{a, 2, 7\}$

1^{er} cas si $a = 0$

alors 0 est valeur propre de $M(0)$ donc $M(a)$ n'est plus inversible

2^{ème} cas $a \neq 0$

a) $a = 7$ et $a = 2$ $M(a)$ a 3 valeurs propres $\neq$ donc $M(a)$ diagonalisable

b) $a = 7$

$$M(7) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad M(7) \text{ symétrique donc diag.}$$

c) $a = 2$

$$M(2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul valeur propre de $M(2)$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ -10 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda) (\lambda-7)(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)^2 (\lambda-7)$$

Spectre $M(2) = \{2, 7\}$

vecteur propre $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur propre de $\Pi(2)$ si $\Pi(2)\vec{u} = \lambda \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = \lambda x \\ 2x + 3y = \lambda y \\ -10x - 5y + 2z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = (\lambda - 6)x \\ 2x = (\lambda - 3)y \\ -10x - 3y = (\lambda - 2)z \end{cases}$$

1^{er} cas si $\lambda = 2$ On a $\begin{cases} 2y = -4x \\ 2x = -y \\ -10x - 5y = 0z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 0 = 0z \end{cases}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2(\Pi(2)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2^{ème} cas si $\lambda = 7$ $\begin{cases} 2y = x \\ 2x = 4y \\ -20y - 5y = 5z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -5y \end{cases}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -5y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{vect propre } \vec{u}_3^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E_1(\Pi(2)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

comme $\dim E_2(\Pi(2)) + \dim E_1(\Pi(2)) = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \Pi(2) \text{ diagonalisable}$

On peut donc écrire $\Pi(2) = P D P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Revue

Subs échangeable

Donc a est entier, b est entier, c est entier

$$(\Pi(2))^n = P D^n P^{-1}$$

$$\Pi(2) = P D P^{-1}$$

$$\begin{aligned} (\Pi(2))^2 &= \Pi(2) \Pi(2) = P D P^{-1} P D P^{-1} \\ &= P D D P^{-1} \\ &= P D^2 P^{-1} \end{aligned}$$

Calcul de P^{-1}

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}$$

etc et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\Pi(2))^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \times 7^n + 2^n & 2(7^n - 2^n) & 0 \\ 2(7^n - 2^n) & 7^n + 4^n & 0 \\ -10(7^n - 2^n) & -5(7^n - 2^n) & 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8.4

$\sum$ ^{lignes} ~~colonnes~~ de A est égale à $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
 c.-à-d. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 3$

d'autre part $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-3) (3-\lambda)^2 = (\lambda-3)^3$$

3 est l'unique valeur propre

A inversible car $\lambda = 3 \neq 0$

$A \neq 3I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 8.5

$$1) (A - I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & 5 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)(A - I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & 5 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & 5 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - I_3) \text{ est nilpotente d'ordre 3.}$$

$$(A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det[(A - I_3)^3] = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\det(A - I_3))^3 = 0 \quad \det(AI) = 0$$

$$(P(\lambda) = \det(A - \lambda I))$$

$$P(1) = 0$$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur propre de A .

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 2z = x \\ -6x + 7y + 5z = y \\ 3x - 3y - 2z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2z = 3x \\ -6x + 5z = -6y \\ 3x - 3y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2x - 2y = 3x \\ -6x + 5x - 5y = -6y \\ z = x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Review

Sub exchange 1)
 on integer, 5 as integer, 6 as integer

$$E_n(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \dim(E_n(A)) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$= \sqrt{2}$$

$$A:$$

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ x+2 \end{pmatrix}$$

$$= (A - I)$$

$$(A - I)$$

$$(-\sqrt{2})$$

$$(-\sqrt{2})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1$$

$$P_2$$

Revisio

Subs échangeable
 Dim a ou entier, b ou entier, c ou entier
 a=8
 b=10

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \quad L_3 + L_2$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.6

- 1) A est symétrique par rapport à la diagonale principale donc diagonalisable ($A = \lambda I_n \rightarrow$ diagonalisable).

$$A - 3I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - 3I_n) = 0$ car toutes les lignes/colonnes sont identiques donc $\lambda = 3$ valeur propre

$$\Rightarrow \text{Im}(A - 3I_n) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \dim(A - 3I_n) = 1$$

$$\dim \text{Im}(A - 3I_n) + \dim \text{Ker}(A - 3I_n) = n \\ = n \Rightarrow \dim \text{Ker}(A - 3I_n) = n - 1$$

$$\text{Ker}(A - 3I_n) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - 3I_n) \vec{x} = \vec{0} \right\}$$

$$E_3(A - 3I_n)$$

$$\dim E_3(A - 3I_n) = n - 1$$

$$\begin{aligned} E_A(A) &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / A \vec{x} = \lambda \vec{x} \right\} \\ &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / A \vec{x} = 3 \vec{x} \right\} \\ &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - 3I_n) \vec{x} = \vec{0} \right\} \\ &= \text{Ker}(A - 3I_n) \end{aligned}$$

Revue

Sub exchange ()

Dime a as uligen, 5 as

 $a=8$
 $b=10$
 $c=a$

$$3) \dim \ker(A - 3I_n) = n-1$$

$\Rightarrow E_3(A - 3I_n)$ est générée par $n-1$ vecteurs
dont chacun est associé à $\lambda = 3$.
Donc 3 apparaît $n-1$ fois.

((Trace = $\sum$ des termes diagonaux = $\sum$ des valeurs propres)) $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
 $A^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$

$$3(n-1) + \lambda = 4n$$

$$3n - 3 + \lambda = 4n$$

$$\lambda = n+3$$

$$\text{Spectre } A = \{3; n+3\}$$

Exercice 8.7

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}}_{\vec{w}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}}_{\vec{w}_n}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Δ erreur
erroné

hange 1/1
 0 integer, 5 as integer, 6 as integer

valeurs
 (10) $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
 $A^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$

$$\begin{aligned} 2) (A - I_3)^3 \vec{v} &= \vec{0} \\ (A^3 - 3A^2I + 3AI^2 - I^3) \vec{v} &= \vec{0} \\ (A^3 - 3A^2 + 3A - I) \vec{v} &= \vec{0} \\ A^3\vec{v} - 3A^2\vec{v} + 3A\vec{v} - I\vec{v} &= \vec{0} \\ \lambda^3\vec{v} - 3\lambda^2\vec{v} + 3\lambda\vec{v} - \vec{v} &= \vec{0} \\ (\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda - 1) \vec{v} &= \vec{0} \\ (\lambda - 1)^3 \vec{v} &= \vec{0} \\ (\lambda - 1) &= 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ valeur propre triple pas diagonalisable (car comme il y a 3 colonnes il aurait fallu 3 valeurs propres)
 $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ inversible

$A \neq \lambda I$ avec $\lambda = 1 \Rightarrow$ pas diagonalisable.

$$3) \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A - I) \vec{y} = \vec{u}_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + 3y + 2z = 1 \\ -6x + 6y + 5z = 1 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

(L1) $-3x + 1 - 3y - 2z \Rightarrow x = -\frac{1}{3} + y + \frac{2}{3}z$
 (L2) $-6(-\frac{1}{3} + y + \frac{2}{3}z) + 6y + 5z = 1 \Rightarrow 2 - 6y - 4z + 6y + 5z = 1$
 $\Rightarrow z = -1$

$$(b) 3\left(-\frac{1}{3} + y + \frac{2}{3}z\right) - 3y + 3 = 0$$

$$-1 + 3y - 2 - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} + y - \frac{2}{3}z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ z = -1 \end{cases}$$

$$d'a \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -1+y \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{y=1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{en posant } y=1)$$

$$B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \quad \text{matrice associée}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (1 - 0) = 1 \neq 0$$

donc les 3 colonnes sont libres et forment donc une base de $\mathbb{R}^3$.

$$4) \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & L_2 - L_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$